

短跑数学模型及其应用

—风速和海拔对 100 m 成绩的影响

王国栋, 陆阿明

摘要: 采用文献综述法, 结合短跑数学模型研究的发展过程, 将考虑空气阻力对短跑成绩影响的数学模型分为动力学模型和能量模型两大类, 对模型的建立基础及应用结果进行比较, 主要比较不同风速和海拔高度对 100 m 跑成绩的影响, 分析不同模型结果差异的原因, 为短跑的数学建模和短跑成绩的标准化提供参考。

关键词: 100 m 短跑; 数学模型; 空气阻力; 海拔; 风速

中图分类号: G804.6 文献标识码: A 文章编号: 1006-1207(2009)02-0064-03

Sprint Mathematical Model and Its Application

--The Effects of Wind and Altitude in the 100m Sprint

WANG Guo-dong, LU A-ming

(Collage of physical education, Suzhou University, Suzhou 215021, China)

Abstract: By the method of literature study and based on the research development of sprint mathematical model, the article divides the mathematical model, which takes the effect of air resistance on performance into account, into two models of dynamic model and energy model. It compares the foundation of the model to the application result. It analyzes the effects of different wind speed on the result of 100m sprint and the cause of difference between the application of different models. It tries to provide reference for the establishment of sprint mathematical model and the standardization of sprint performance.

Key words: 100m sprint; mathematical model; air resistance; altitude; wind speed

风速对短跑成绩具有显著的影响, 海拔高度同样扮演着重要的角色, 随着海拔高度的上升, 空气密度降低, 空气阻力下降, 与低海拔相比, 运动员可以达到更快的速度。对短跑的空气动力学研究可以追溯到 1927 年, Hill 通过风洞实验估算了风速对短跑成绩的影响^[1]。此后, 很多学者对不同距离跑中空气阻力的影响进行研究。研究发现, 风速和海拔, 这些看似微弱的因素对比赛的影响可在百分之一及 0.1 s 的数量级上, 比目前的电子计量仪器的精度 (0.01 s) 要高一个数量级。这些研究大多通过数学建模, 用模型进行运动数值分析, 定量分析相关影响因素对短跑成绩的作用。数学建模是运动生物力学研究常用的重要方法, 大多用来进行技术分析、技术优化和新动作的设计, 而对成绩的标准化研究相对较少。短跑模型精确地模拟了短跑比赛, 更为短跑的生理学和生物力学研究提供很好的方法。本文通过对不同数学模型的介绍和比较, 以期研究短跑成绩标准化及最佳能量分配问题提供一定的参考依据。更希望在运动生物力学研究中, 能引起对这种结合运动医学与数学的计算机模拟方法的重视。

1 短跑的动力学模型和能量模型

总体来说, 研究短跑成绩的模型主要分为两大类: 从牛顿第二定律出发的动力学模型和从能量供求平衡关系出发的能量模型。也有两者结合的综合模型, 用以研究短跑能量分配最佳策略的。

1.1 短跑的动力学模型

Keller 建立一个预测不同距离跑比赛时间的简化模型, 模型包括一组微分方程:

$$\begin{aligned}\dot{d}(t) &= v(t) \\ \dot{v}(t) &= f(t) - \alpha \cdot v(t)\end{aligned}$$

$v(t)$ 为时刻 t 时的速度, $f(t)$ 为单位质量的推进力, α 为限制最大速度的衰减常数, 比赛距离为速度对时间的积分, 即

$$d = \int_0^T v(t) dt$$

通过代入初始条件对上式进行计算得出结果^[2, 3]。

近几十年来, 众多研究者在 Keller 模型的基础上, 通过对模型的修改与补充, 逐步完善模型, 定量分析空气阻力对短跑的作用。

Quinn 引入空气阻力的作用将微分方程演变为:

$$\dot{v}(t) = f(t) - \alpha \cdot v(t) - \frac{\rho \cdot C_d \cdot S}{2M} (v(t) - v_w)^2$$

其中 ρ 为空气密度, C_d 为阻力系数, S 为垂直于运动方向的横截面积, M 为运动员质量, v_w 为风速 (顺风取正值, 逆风相反)^[4]。

Mureika 根据动力与阻力对加速度的平衡关系, 建立了一个近似物理模型^[5]。模型兼有数学成分和物理成分, 描述短跑的运动学方程包括四项 (推动项、保持项、速度项

收稿日期: 2008-11-12

第一作者简介: 王国栋 (1986-), 男, 在读硕士研究生, 研究方向: 运动生物力学。

作者单位: 苏州大学体育学院, 江苏 苏州 215021



和阻力项)。

$$\dot{v}(t) = f_s + f_m + f_r + f_d$$

对应分别为:

$$\dot{v}(t) = f_s \exp(-\sigma \cdot t^2) + f_r \exp(-c \cdot t) - a \cdot v(t) - \frac{\rho(H) \cdot C_d \cdot S}{2M} \left(1 - \frac{1}{4} \exp(-\sigma \cdot t^2)\right) (v(t) - v_w)^2$$

模型考虑起跑阶段人体横截面积的变化,在阻力项中引入 $1 - \frac{1}{4} \exp(-\sigma \cdot t^2)$ 因子。该模型能够很好的模拟实际比赛的 $v(t)$ 曲线。

1.2 短跑的能量模型

能量模型从跑的能量供应和能量消耗出发,建立能量转换模型,定量分析功能关系的改变对比赛结果的影响,从而确定空气阻力对短跑成绩的影响。

最早的能量模型由 Ward-Smith 根据热力学第一定律建立^[6], Ward-Smith 在后来的研究中逐步完善其模型^[7,8]; Prampero 根据能量的供求关系建立了相似的模型^[9]。总体来看,能量供应包括有氧供能和无氧供能两部分,能量的消耗包括以热能形式损失的能量、克服空气阻力做功的能量和改变动能所需的能量。由能量平衡方程:

$$C = H + W$$

C 为总供能,包括有氧和无氧两部分, $C = C_{an} + C_{aer}$; H 为热能, $\frac{dH}{dt} = Av$; W 为做功能量,微分代入各参量得到的功率表达式为:

$$P_{max} \exp(-\lambda t) + R[1 - \exp(-\lambda t)] = Av + \frac{1}{2} \rho v(v - v_w)^2 SC_d + mv \frac{dv}{dt}$$

左式中 P_{max} 为无氧代谢最大功率; R 为有氧代谢最大功率;右式第一项为热能消耗功率;第二项为克服空气阻力做功功率;最后一项为动能变化功率。

Ward-Smith 的能量模型各部分都具有清晰的意义,但在模型中其无氧代谢最大功率 P_{max} 仅为有氧代谢最大功率 R 的两倍多一点,具有一定的不合理性,鉴于此 Laurent 考虑了化学能转化为对外做功的效率因素,把功率表达式修改为:

$$P_{max} \exp(-\lambda t) + R[1 - \exp(-\lambda t)] = Av + \eta_0 \frac{1}{2} \rho v(v - v_w)^2 SC_d + \eta_c mv \frac{dv}{dt}$$

这里 Av 不再是热能消耗功率,被作者描述为非克服空气阻力消耗功率或推进功率^[10]。

2 短跑模型在运动实践中的应用

运用短跑模型,采用控制变量法,定量研究风速和海拔高度对比赛的影响,从而实现对不同赛况下比赛成绩的标准化比较。本文以 100 m 为例进行说明。

2.1 风速对 100 m 跑成绩的影响

国际田联 (IAAF) 把顺风速度大于 2 m/s 的短跑成绩视为“风力协助”成绩,在纪录排名时对成绩不予认可。为了比较的方便,采取同样的标准,在相同距离跑中,比较 2 m/s 的顺风对比赛成绩的影响。

Dapena 和 Feltner 从力的平衡入手建立包括空气阻力作用的力学模型,通过解析拍摄 100 m 的实验图像得到加速度,推导空气阻力,再用世界级选手的表现对模型参数进行修改,使模型的预测结果与统计数据的趋势相近。最终模型显示: 2 m/s 的顺风对 100 m 跑的平均作用为 0.07 s^[12]; Pritchard 通过对恒定速度和功率下无风与有风成绩的比较,预测 2 m/s 的顺风为 100 m 跑带来略大于 0.1 s 的优势^[13]; Behncke 在 Keller 的模型基础上,利用微分方程的积分曲线与最优控制方法,综合力和能的关系推导 2 m/s 的顺风对

100 m 跑的作用为 0.135 s^[14]。

Heidenstrom 从能量平衡入手建立简化模型推算: 2 m/s 的顺风对 100 m 跑的平均作用为 0.16 s^[11]; Ward-Smith 的能量模型估算: 2 m/s 的顺风为男子 100 m 跑创造 0.18 s 的优势,对女子的 100 m 作用更大,略高于 0.2 s^[7]。之后, Ward-Smith 结合 Linthorne 的统计数据对其模型进行改进,考虑上躯干的倾斜程度对空气作用力的影响,以及不同风速对机械能转变为热能比例的作用,改进后的模型计算 2 m/s 的顺风对 100 m 跑的平均作用为 0.10 s^[8]。

Linthorne 通过对 1983 年到 1992 年间众多比赛成绩的统计分析,结果提示: 2 m/s 的顺风对男子 100 m 跑的平均作用为 0.1 s^[15]。最近的两个研究, Mureika 的近似物理模型^[5]和 Quinn 的力学模型^[4]得出了与 Linthorne 相近的结果。

目前,除少数研究外,大部分研究得出较为一致的结论: 2 m/s 的顺风对男子 100 m 跑的平均作用为 0.1 s。

2.2 海拔高度对 100 m 跑成绩的影响

与风速对比赛的影响不同,虽然 IAAF 把在海拔高于 1 000 m 的比赛成绩视为“海拔协助”成绩,但纪录排名时对成绩给予认可。随着海拔的升高,空气密度减小,运动员所受空气阻力减小,对一定的比赛距离,克服空气阻力所做的功也减小,伴随而来的是改变动能能量的增加,及运动员速度提升,赛时缩短。

Mureika 的近似物理模型计算的结果:海拔高度 1 000 m 对 100 m 比赛的影响为 0.04 s; Quinn 的力学模型推算 1 000 m 的海拔对 100 s 的成绩产生 0.032 s 的作用。

对于 100 m 这样短距离急速跑项目,有氧代谢对能量供应的贡献很小, Peronnet 等认为有氧供能功率受海拔高度变化的影响可以忽略^[16]。所以其根据能量供求关系建立的能量模型,只反映随着海拔高度增加,空气阻力减小所带来的影响。Mureika 的近似物理模型也未考有氧供能功率受海拔高度变化的影响^[5]。而 Laurent 则考虑该因素建立了相似的模型^[10],对模型的结果分析表明在 100 m 跑中,虽然有氧代谢对能量供应的贡献很小,但随着海拔高度的增加,有氧代谢功率的降低,使总供应能量的减少量中,有氧代谢能量的减少量与无氧代谢能量的减少量具有很大的可比性,即从能量供应和能量消耗两方面分析海拔高度对比赛的影响。对于相近的能量模型, Peronnet 等的能量模型计算 1 000 m 左右的海拔高度对男子和女子 100 m 的影响分别为 0.09 s 和 0.11s (几乎为 Mureika 结果的两倍),而 Laurent 计算结果分别为 0.08 s 和 0.09 s。

最近, Mureika 运用标准的空气动力学原理,将空气密度表示为温度、压强和湿度的函数,对此前的数学模型进行修改,结果显示:在同样的风速计量结果下,不同的大气状况可产生轻微的差异,如无风时的 100 m 跑,温度影响最大,每增加 10°,成绩变化 0.01 s。而湿度影响最小,任何情况下均小于 0.01 s。压强变化的影响也可能在 0.01 s 的数量级上^[17]。可见,仅将空气密度表示为海拔高度的函数过于简单,使不同研究结果缺乏一致性,海拔提高 1 000 m,给 100 m 带来 0.03~0.08 s 的优势。若直接测量出比赛时的空气密度,则能避开空气密度的相关影响因素进行精确的模型计算。



2.3 100 m跑成绩的标准化

通过模型综合计算风速和海拔高度对比赛成绩的影响,对比赛成绩进行校正,相当于把比赛放到统一的标准情况(无风,零海拔高度)下进行比较,为教练员或媒体对运动员和比赛的综合评定提供有效的依据。如根据模型计算结果,制作不同风速和海拔高度对100 m成绩的校准量表,甚至提炼出简化的成绩校准公式,使标准化工作更加方便。

3 短跑模型中存在的问题

由于影响空气阻力的因素太多,任何一个变量的准确性将直接影响模型的结果。

3.1 阻力系数和横截面积的选取

对模型参数进行灵敏度分析, Ward-Smith发现空气阻力项系数 C_d 每变化1%,对应的时间变化为0.01 s,即参数变化10%,时间改变0.1 s^[8],而Peronnet将 C_d 变化10%,时间改变0.07 s^[10]。足以体现空气阻力对比赛的作用程度,而不同研究者在研究风速和海拔高度对比赛成绩的影响时得到不同的结果,除了模型方法的原因外,主要是横截面积和阻力系数的选取差异造成的,对于身高1.80 m,体重74 kg的男运动员, Ward-Smith模型中, C_d 取0.715,而Peronnet模型中却为0.9。比较不同模型, C_d 的变化范围在0.5~1.0之间,横截面积也有相当大的差异,为了提高模型的有效性,有必要对阻力系数和横截面积的准度和精度提出更高的要求。

另外,在对世界纪录成绩的校准时,考虑运动员的个体差异,每个运动员应该采用独立的参数,而不是仅用男女两个标准。

3.2 起跑反应时间

许多模型并未考虑运动员的起跑反应时间,这无疑对模型的结果产生一定的影响。运动员平均反应时约为0.15 s,即便是顶级的百米运动员,其反应时间也很少小于0.13 s^[4]。无论模型用平均反应时还是规则允许的最小反应时0.1 s,都有一定的不合理性。因为对于不同个体,反应时的波动范围一般为0.12~0.19 s;对于同一个体,反应时变化相对较小,但亦达百分之几秒。由于比赛中反应时可以直接获得,建议建模时考虑反应时影响并运用实测反应时进行计算。

3.3 能量模型中的不确定项

能量模型中,无论是热能消耗功率还是推进功率 A_p ,一般采用恒定的A值,即功率正比于速度 v ,在速度2.8~5.6 m/s的范围内已得到大量实验的支持^[18],但在10 m/s左右的短跑中,A值恒定与否还是未知数。Ward-Smith在Davies的基础上将A表达为风速的 v_w 函数,但具体的函数关系还有待实验确定。

4 小结

动力学模型和能量模型从不同的角度出发对比赛进行模拟,运用模型分析风速和海拔高度对比赛成绩的影响,总体来看,2 m/s的顺风为100 m跑创造大约0.1 s的优势,而1 000 m的海拔高度对比赛的影响比2 m/s的顺风的小,在0.03~0.08 s之间。不同模型计算结果的差异,除了模型方法的原因外,主要来自模型参数的选取,尤其是阻力系数和横截面积的大小。为了更好的对比赛成绩进行标准

化比较,必须提高模型相关参数的准度与精度。建议在比赛时,除了记录与运动方向相平行的风速外,增加对空气密度的测量。

参考文献

- [1] Hill,A.V.(1928).The air resistance to a runner[C]. Proceedings of the Royal Society,B,102:380-385.
- [2] Keller, J.B.(1973). A theory of competitive running[J]. *Physics Today*,26:43-47.
- [3] Keller,J.B.(1974).Optimal velocity in a race[J]. *American Mathematical Monthly*,81:474-480.
- [4] Quinn,M.D. (2003).The effects of wind and altitude in the 200-m sprint[J]. *Journal of Applied Biomechanics*,19:49-59.
- [5] Mureika,J.R.(2001). A Realistic quasi-physical model of the 100-m dash[J]. *Canadian Journal of Physics*,79:697 -713
- [6] Ward-Smith, A.J.(1985). A mathematical theory of running, based on the first law of thermodynamics, and its application to the performance of world-class athletes[J]. *Journal of Biomechanics*, 18: 337-349.
- [7] Ward-Smith, A.J.(1985). A mathematical analysis of the influence of adverse and favourable winds on sprinting[J]. *Journal of Biomechanics*, 18:351-357.
- [8] Ward-Smith,A.J.(1999). New insights into the effect of wind assistance on sprinting performance[J].*Journal of Sports Sciences*, 17(4): 325 - 334.
- [9] Prampero PE di.(1986). The energy cost of human locomotion on land and in water[J]. *Int J Sports Med*, 7:55-72.
- [10] Laurent.(2002). Effects of altitude on the energetics of human best performances in 100m running :a theoretical analysis[J]. *Eur J Physiol*,87:78-84
- [11] Heidenstrom, P.(1982). Wind assistance adjustment[J]. *New Zealand Athlete*,21: 73-77.
- [12] Dapena, J. and Feltner, M.E.(1987). Effects of wind and altitude on the times of 100-m sprint races[J]. *International Journal of Sport Biomechanics*,3: 6-39.
- [13] Pritchard, W.F.(1993). Mathematical models of running[J]. *Society for Industrial and Applied Mathematics Review*, 35:359-379.
- [14] Behncke, H.(1994). Small effects in running[J]. *Journal of Applied Biomechanics*, 10: 270-290.
- [15] Linthorne,N.P.(1994).The effect of wind on 100-m sprint times [J]. *Journal of Applied Biomechanics*,10:110-131.
- [16] Peronnet F,Thibault G., Cousineau DL.(1991).A theoretical analysis of the effect of altitude on running performance[J]. *J Appl Physiol*,70:399-404
- [17] Mureika,J.R.(2006).The effects of temperature, humidity, and barometric pressure on short-sprint race times[J]. *Canadian Journal of Physics*,84: 311-324
- [18] Di Prampero. e.al.(1993). Energetics of best performance in middle-distance running[J].*J Appl Physiol*,74(5):2318-2324.

(责任编辑:何聪)